4次元のRicatti方程式

4 次元の Ricatti 方程式

埼玉大・教育　　小　暮　陽　三

§1. まえがき

Kerner. E は化学反応および酵素反応の方程式に応用するため，多次元の Ricatti 方程式の線形化法[1]を提案し，さらにGibbs流の統計力学的な扱いを試みている。Voltettera 方程式を基礎にした同様な統計力学的な扱いは E. Teramoto[2] による Review がある。しかし，同じKerner の仕事でも，Ricatti 方程式から出発した扱いは，あまりすっきりしていないように思われる。統計力学にまで立ち入らないでも，最近H. C. Morris[3] は Kerner の線形化が実行できる条件を明きらかにしている。しかし，彼の条件から逆にKerner の線形化できる Ricatti 方程式を導くことは難しく，与えられた Ricatti 方程式が線形化できないことは判断できても，線形化可能な Ricatti方程式を必要に応じて具体的に導くわけにはいかない。Morris 自身も2次元，3次元の場合に限って，適当なる一環の元を試行錯誤式に求めていて，線形化できる例として，かなり特殊な方程式を導いている。より高次元に対しては "In higher dimensions the situations is more complicated and we do not examine it further at this moment" としている。

このノートは4次元の場合について，Morris の条件を満たす一般化した Ricatti 変換を求める。やはり試行錯誤式に計算を行うと，結果は特殊な形しか得られないことを示す。詳細は原論文に譲ることにして必要最小限だけ，Kerner，Morris,, の方法を抜書きをしよう。出発点となる式は

$$x_i = \varepsilon_i + \sum_j k_{ij} x_j + \sum_{jk} K_{ijk} x_j x_k . \tag{1-1}$$

Kerner の変換は

$$x_i = -(\Gamma^{\ell} z_{\ell})^{-1}_{ik} \dot{z}_k , \tag{1-2}$$

$\{\Gamma^{\ell}\}$ は n 行 n 列の行列で

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_b \boldsymbol{\Gamma}_r &= \boldsymbol{\Gamma}_w K_{wbr}\,, \\ (\boldsymbol{\Gamma}_b)_{ac} &= (\boldsymbol{\Gamma}^c)_{ab}\,, \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

を満足することが，Kerner の条件である。(1-3) の下の式は $\boldsymbol{\Gamma}^c$ と $\boldsymbol{\Gamma}_b$ を結ぶ関係を表わす定義である。これに対して Morris は (1-3) の代りに

$$[\boldsymbol{\Gamma}_b, \boldsymbol{\Gamma}_r]_+ = 2K_{wbr}\boldsymbol{\Gamma}_w\,, \tag{1-4}$$

$$[\boldsymbol{\Gamma}_b, \boldsymbol{\Gamma}_r]_- = 2L_{wbr}\boldsymbol{\Gamma}_w\,, \tag{1-5}$$

を満たす $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ の条件に置きかえている。添字－は交換積，＋は反交換積である。(1-4)，(1-5) は Ricatti 変換の行列 $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ と $\{K_{ijk}\}$ とが混ざった条件であるから，$K_{wbr} = (\overline{K}_s)_{wr}$ で行列 $\{\overline{K}_s\}$ を定義し

$$[\overline{K}_s, \overline{K}_b]_- = L_{wsb}\overline{K}_w \tag{1-6}$$

を条件とする。しかし，実際に (1-6) から出発して，K_{ijk} を定めることは難しく，結局 (1-4)，(1-5) に戻って，好都合な $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ を探し当て，線形化出来る方程式を導くという手順を踏むことになる。(1-5) の右辺が 0 のときは Abelian と称し，$\boldsymbol{\Gamma}_b$，$\boldsymbol{\Gamma}_r$ は同時に対角化できるので問題はない。これに対して L_{wbr} が 0 でない Non-Abelian の場合は適当 $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ を選んで，(1-4)，(1-5) を満足させなくてはならない。

§ 2. 4次元への拡張

次の基底行列（4行4列）を4個とる。

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{2-1}$$

ただし $\mathbf{C}_1$，$\mathbf{C}_2$ は2行2列の行列

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2-2}$$

である。$\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ は一次独立であり，また，Jacobi の恒等式など，リー環の元が満た

すべき4条件[4]を満足している。この証明はやさしいので省略する。

C_1, C_2 の交換積，および反交換積は

$$[C_1, C_2] = C_2 , \quad [C_1, C_2]_+ = C_2 , \tag{2-3}$$

の関係があり，$C_2^2 = 0$, $C_1^2 = C_1$ の性質がある。以上から (2-1) の $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ について交換積と反交換積を計算すると

$$[\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2] = \boldsymbol{\Gamma}_2, \quad [\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_3] = \boldsymbol{\Gamma}_3, \quad [\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_4] = \boldsymbol{\Gamma}_4 . \tag{2-4}$$

$$[\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_1]_+ = 2\boldsymbol{\Gamma}_1, \quad [\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2]_+ = \boldsymbol{\Gamma}_2, \quad [\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_3]_+ = \boldsymbol{\Gamma}_3 , \quad [\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_4]_+ = \boldsymbol{\Gamma}_4 \tag{2-5}$$

の関係が成り立ち，(2-4)，(2-5) 以外の交換積，反交換積はすべて0になる。

Morris の方法に従って，Ricatti 方程式 (1-1) の非線形項の係数 K_{ijk} は，反交換積 (2-5) により

$$K_{111} = 1 , \quad K_{212} = K_{221} = \frac{1}{2}, \quad K_{313} = K_{331} = \frac{1}{2}, \quad K_{414} = K_{441} = \frac{1}{2}, \tag{2-6}$$

になる。一方，Non-Abelian を示す行列要素，(1-5) は交換積 (2-5) によって

$$L_{212} = L_{221} = \frac{1}{2}, \quad L_{414} = L_{441} = \frac{1}{2}, \quad L_{313} = L_{331} = \frac{1}{2} \tag{2-7}$$

で与えられる。

したがって，(1-1) に対して (2-6) をとった

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon_1 + k x_1 + x_1^2 , \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon_2 + k x_2 + x_1 x_2 , \\ \dot{x}_3 &= \varepsilon_3 + k x_3 + x_1 x_3 , \\ \dot{x}_4 &= \varepsilon_4 + k x_4 + x_1 x_4 , \end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

は (2-1) の $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ による Ricatti 変換 (1-2) を行うと，線形化できる。(2-8) の非線形項は Morris の称する Canonical Form になっている。(2-8) に直交変換を行い，変数を x_i から y_i に移すと，

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \alpha_1 + k y_1 + \alpha y_1^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma y_1 y_3 + \delta y_1 y_4 \,, \\
\dot{y}_2 &= \alpha_2 + k y_2 + \beta y_2^2 + \alpha y_1 y_2 + \gamma y_2 y_3 + \delta y_2 y_4 \,, \\
\dot{y}_3 &= \alpha_3 + k y_3 + \gamma y_3^2 + \beta y_2 y_3 + \alpha y_1 y_3 + \delta y_3 y_4 \,, \\
\dot{y}_4 &= \alpha_4 + k y_4 + \delta y_4^2 + \beta y_2 y_4 + \gamma y_3 y_4 + \alpha y_1 y_4 \,,
\end{aligned}\right\} \quad (2\text{–}9)
$$

Morris の3次元の式(3.12)を4次元に拡張した結果を導いたことになっていて，$y_4 = 0$とすると，彼の(3.12)を含んでいる。

§3. 結　び

(2-1)の $\{\Gamma_j\}$ は次の条件を満たす。

1) 互に1次独立である。

2) $K_{wbs} = (\overline{K}_s)_{wb}$ とすると，(1-6)の

$$
[\overline{K}_s, \overline{K}_b]_- = L_{wsb} \overline{K}_w \qquad (3\text{–}1)
$$

を満足している。また，

3) (2-8)のkは明きらかに

$$
[k, \overline{K}_r]_- = 0, \quad \forall r \qquad (3\text{–}2)
$$

を満足し，

4) $(\overline{M}_l)_{st} = (K_{stl} + L_{stl})$ とすると

$$
[\overline{M}_l, k] = 0, \quad \forall l \qquad (3\text{–}3)
$$

を明きらかに満たしている。ただし4)は必要条件である。よって，$\{\Gamma_j\}$ は4次元のRicatti 変換で，1次の係数 k_i はすべて等しいとした最も単純な形を選んではおいた。

もちろん，ここで求めた $\{\Gamma_j\}$ は一意的ではなく，早急な結論は出せないが，Kerner の変換条件を満足するRicatti方程式はかなり制約を受けた特殊な形に限定されると予想される。このことはMorris の2次元，3次元と比べても考えられることである。なお1次元のRicatti方程式の応用についてはH. Sabata[5)]の仕事があり，これらと合わ

せて，今少し立ち入った考察が必要であろう。

参 考 文 献

1) Kerner. E. Bull. Math. Biophysics. 34 243-275, 1972.

2) 寺本 英，生命の物理第Ⅱ部，岩波

3) H. C. Morris. Bull. Math. Biology 36 67-76, 1974.

4) 山内恭彦，杉浦光夫，連続群論入門 p 33. 培風館

5) 鯖田秀樹 生物モデルの数学（数理科学講究録 174，1973年3月） p 126 -129